

2011

Series SOS/2Code No. **65/2/2**
कोड नं.Roll No.
रोल नं.

| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.
परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer script during this period.
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।

MATHEMATICS**गणित***Time allowed : 3 hours**Maximum Marks : 100*

निर्धारित समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

65/2/2

1

P.T.O.

General Instructions :

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) The question paper consists of 29 questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of 10 questions of one mark each, Section B comprises of 12 questions of four marks each and Section C comprises of 7 questions of six marks each.
- (iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.
- (iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.
- (v) Use of calculators is **not** permitted.

सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है । खण्ड ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है । खण्ड स में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है ।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

SECTION A

खण्ड अ

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

1. What are the direction cosines of a line, which makes equal angles with the co-ordinate axes ?

उस रेखा के दिक् कोसाईन क्या हैं जो निर्देशांक अक्षों के साथ समान कोण बनाती है ?

2. If $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, then what can be concluded about the vector \vec{b} ?

यदि $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ है, तो सदिश \vec{b} के विषय में क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है ?

3. Write the position vector of the mid-point of the vector joining the points P(2, 3, 4) and Q(4, 1, -2).

बिन्दुओं P(2, 3, 4) तथा Q(4, 1, -2) को मिलाने वाले सदिश के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश लिखिए ।

4. Evaluate :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

5. If $\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, write the positive value of x.

यदि $\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ है, तो x का धनात्मक मान लिखिए ।

6. Write the order of the product matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \ 3 \ 4]$$

गुणनफल आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \ 3 \ 4]$ की कोटि लिखिए ।

7. Write the values of $x - y + z$ from the following equation :

$$\begin{bmatrix} x + y + z \\ x + z \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित समीकरण से $x - y + z$ के मान लिखिए :

$$\begin{bmatrix} x + y + z \\ x + z \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

8. Write the principal value of $\tan^{-1}(-1)$.

$\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान लिखिए ।

9. Write $f \circ g$, if $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are given by :

$$f(x) = |x| \quad \text{and} \quad g(x) = |5x - 2|.$$

$f \circ g$ लिखिए, यदि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ तथा $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ निम्न द्वारा प्रदत्त हैं :

$$f(x) = |x| \quad \text{तथा} \quad g(x) = |5x - 2|.$$

10. Evaluate :

$$\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$$

SECTION B**खण्ड ब**

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

11. Find the mean number of heads in three tosses of a fair coin.

एक न्याय्य (fair) सिक्के की तीन उछालों पर प्राप्त चित्तों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए ।

12. If vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ are such that $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ is perpendicular to \vec{c} , then find the value of λ .

यदि सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ ऐसे हैं कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, \vec{c} पर लम्बवत् है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए ।

13. Find the particular solution of the differential equation :

$$(1 + e^{2x}) dy + (1 + y^2) e^x dx = 0, \text{ given that } y = 1 \text{ when } x = 0.$$

अवकल समीकरण $(1 + e^{2x}) dy + (1 + y^2) e^x dx = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, यदि $x = 0$ है, तो $y = 1$ है ।

14. Evaluate :

$$\int e^{2x} \sin x dx$$

OR

Evaluate :

$$\int \frac{3x + 5}{\sqrt{x^2 - 8x + 7}} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int e^{2x} \sin x \, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2-8x+7}} \, dx$$

15. Prove that :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \right] = \sqrt{a^2-x^2}$$

OR

If $y = \log \left[x + \sqrt{x^2+1} \right]$, prove that $(x^2+1) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0$.

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \right] = \sqrt{a^2-x^2}$$

अथवा

यदि $y = \log \left[x + \sqrt{x^2+1} \right]$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2+1) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0$.

16. Find the intervals in which the function f given by

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

is strictly increasing or strictly decreasing.

OR

Find the points on the curve $y = x^3$ at which the slope of the tangent is equal to the y -coordinate of the point.

$f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा परिभाषित फलन f के वो अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन f निरन्तर वर्धमान अथवा निरन्तर हासमान है ।

अथवा

वक्र $y = x^3$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिन्दु के y -निर्देशांक के बराबर है ।

17. Prove the following :

$$\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

OR

Solve the following equation for x :

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2} \tan^{-1}(x), \quad x > 0$$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

$$\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

अथवा

निम्नलिखित समीकरण को x के लिए हल कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2} \tan^{-1}(x), \quad x > 0$$

18. Consider $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [4, \infty]$ given by $f(x) = x^2 + 4$. Show that f is invertible with the inverse (f^{-1}) of f given by $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$, where \mathbb{R}_+ is the set of all non-negative real numbers.

$f(x) = x^2 + 4$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [4, \infty]$ पर विचार कीजिए । सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा f का प्रतिलोम (f^{-1}), $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$ द्वारा प्राप्त होता है, जहाँ \mathbb{R}_+ सभी ऋणोत्तर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है ।

19. Prove, using properties of determinants :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

20. Find the value of k so that the function f , defined by

$$f(x) = \begin{cases} kx+1, & \text{if } x \leq \pi \\ \cos x, & \text{if } x > \pi \end{cases}$$

is continuous at $x = \pi$.

k का मान ज्ञात कीजिए ताकि फलन f , जो निम्न द्वारा परिभाषित है, $x = \pi$ पर सतत है :

$$f(x) = \begin{cases} kx+1, & \text{यदि } x \leq \pi \\ \cos x, & \text{यदि } x > \pi \end{cases}$$

21. Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x, \text{ given that } y = 0, \text{ when } x = \frac{\pi}{3}.$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x, \text{ दिया है कि जब } x = \frac{\pi}{3} \text{ है, तो } y = 0 \text{ है।}$$

22. Find the shortest distance between the lines :

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}).$$

रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ तथा

$$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

SECTION C

खण्ड स

Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं।

23. A cottage industry manufactures pedestal lamps and wooden shades, each requiring the use of grinding/cutting machine and a sprayer. It takes 2 hours on the grinding/cutting machine and 3 hours on the sprayer to manufacture a pedestal lamp. It takes one hour on the grinding/cutting machine and 2 hours on the sprayer to manufacture a shade. On any day, the sprayer is available for at the most 20 hours and the grinding/cutting machine for at the most 12 hours. The profit from the sale of a lamp is ₹ 5 and that from a shade is ₹ 3. Assuming that the manufacturer can sell all the lamps and shades that he produces, how should he schedule his daily production in order to maximise his profit? Make an L.P.P. and solve it graphically.

एक कुटीर उद्योग निर्माता पेडेस्टल लैंप और लकड़ी के शेड बनाता है। प्रत्येक के निर्माण में रगड़ने/काटने की मशीन और स्प्रेयर की आवश्यकता पड़ती है। एक लैंप के निर्माण में 2 घंटे रगड़ने/काटने की मशीन की और 3 घंटे स्प्रेयर की आवश्यकता होती है जबकि एक शेड के निर्माण में 1 घंटा रगड़ने/काटने की मशीन की और 2 घंटे स्प्रेयर की आवश्यकता होती है। स्प्रेयर प्रतिदिन अधिकतम 20 घंटे तथा रगड़ने/काटने की मशीन प्रतिदिन अधिकतम 12 घंटे के लिए उपलब्ध है। एक लैंप की बिक्री पर लाभ ₹ 5 तथा एक शेड की बिक्री पर लाभ ₹ 3 है। यह मानते हुए कि सभी निर्मित लैंप तथा शेड बिक जाते हैं, तो बताइए कि वह उत्पादन की प्रतिदिन कैसी योजना बनाए कि लाभ अधिकतम हो। उपरोक्त को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ की सहायता से हल कीजिए।

24. Evaluate $\int_1^4 (x^2 - x) dx$ as a limit of sums.

OR

Evaluate :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16 \sin 2x} dx$$

योगफल की सीमा के रूप में $\int_1^4 (x^2 - x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16 \sin 2x} dx$$

25. Using the method of integration, find the area of the region bounded by the lines :

$$2x + y = 4$$

$$3x - 2y = 6$$

$$x - 3y + 5 = 0.$$

समाकलन विधि का प्रयोग करके रेखाओं

$$2x + y = 4$$

$$3x - 2y = 6$$

$$x - 3y + 5 = 0$$

से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

26. A window is in the form of a rectangle surmounted by a semi-circular opening. The total perimeter of the window is 10 metres. Find the dimensions of the rectangle so as to admit maximum light through the whole opening.

किसी आयत के ऊपर बने अर्धवृत्त के आकार की खिड़की है । खिड़की का संपूर्ण परिमाण 10 मी. है । पूर्णतया खुली खिड़की से अधिकतम प्रकाश आने के लिए आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए ।

27. Use product $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ to solve the system of equations :

$$x - y + 2z = 1$$

$$2y - 3z = 1$$

$$3x - 2y + 4z = 2.$$

OR

Using elementary transformations, find the inverse of the matrix :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ के गुणनफल का प्रयोग करके समीकरण निकाय}$$

$$x - y + 2z = 1$$

$$2y - 3z = 1$$

$$3x - 2y + 4z = 2$$

को हल कीजिए ।

अथवा

प्रारंभिक रूपान्तरणों का प्रयोग करके निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

28. Find the vector equation of the plane, passing through the points A(2, 2, -1), B (3, 4, 2) and C (7, 0, 6) Also, find the cartesian equation of the plane. 6

उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं A(2, 2, -1), B(3, 4, 2) तथा C(7, 0, 6) से होकर जाता है । उस समतल का कार्तीय समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

29. Bag I contains 3 red and 4 black balls and Bag II contains 4 red and 5 black balls. One ball is transferred from Bag I to Bag II and then a ball is drawn from Bag II at random. The ball so drawn is found to be red in colour. Find the probability that the transferred ball is black. 6

थैला I में 3 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं तथा थैला II में 4 लाल तथा 5 काली गेंदें हैं । एक गेंद को थैला I से थैला II में स्थानांतरित किया जाता है और तब एक गेंद यादृच्छया थैला II में से निकाली जाती है जो लाल रंग की पाई जाती है । स्थानांतरित गेंद के काले रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।